ANALYSIS
Ganzrationale Funktionen

Parabel-Scharen

Aufgabensammlung

Datei Nr. 42 151

Stand 10. September 2016

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Funktionenscharen, speziell Parabelschar werden theoretisch und praktisch im Text 62060 untersucht. Dort findet man alle wichtigen Methoden, zahlreiche Beispiele und Trainingsaufgaben.

In diesem Text stelle ich eine Sammlung umfangreicher Aufgaben zusammen, mit denen man alles im Kotext üben kann.

Die entstandene Sammlung hat selbst mich noch beeindruckt, denn erst in der Zusammenschau erkennt man die „mathematische Schönheit“ dieser Gebilde (Parabelscharen). Schönheit muss man sehen, und daher habe ich gleich ein Bilderbuch (42064) daraus gemacht. Mit dem Grafikprogramm MatheGrafix von Roland Hammes, das meiner Mathe-CD immer beiliegt, kann man ganz fantastische Bilder erstellen. Und so habe ich oft bis zu über 100 Scharkurven zeichnen lassen, damit man sieht, wie sich die Schar in ihrer Vielfalt verhält. Zugleich bieten diese Aufgaben eine hervorragende Einsatzmöglichkeit von Grafikrechnern. Die meisten können zwar keine Kurvenscharen darstellen, aber man kann doch einige dieser Kurven darstellen lassen, oder mit einem CAS-Rechner doch eine Kurvenschar ausgeben. Das gibt einen Motivationsschub.

Diese großen Aufgaben sind interessant und abschreckend zugleich. Denn wer hat schon noch die Zeit, im Unterricht alle diese Methoden zu behandeln? Damit steht aber die Gebrauchsanleitung auch schon fest: Man suche sich die Teilaufgaben heraus, die man besprochen hat.

Ich verfolge mit meinen Texten immer zwei Ziele: Einerseits sollen sie Schülern Hilfe und Anregung geben, andererseits will ich den Lehrern Beispiele und Anregungen vermitteln. Und daher versuche ich auch gerne, etwas über das Ziel hinauszuschießen.

So sind die „[illegible]araufgaben“ [illegible] und 9 entstanden. Ihre Zusätze lassen Staunen aufkommen. Vor allem die Aufgabe 9, die so gar nicht geplant war, eröffnet Fragestellungen, die verblüffen. Sie geht bis in die Analysis von schweren Wurzelfunktionen hinein. Ich werde diese Aufgabe nochmals aufgreifen und bei Wurzelfunktionen noch etwas ausführlicher darlegen. Sie ist auch sehr gut für CAS-Einsatz geeignet, denn die Rechenprozesse sind nicht sehr anspruchsvoll.

Viel Spaß beim Schmökern!

Übersicht

Aufgabe Nr.		Text	Lösung
1	$f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - 4x + 3t$	4	18
2	$f_t(x) = \frac{1}{4}x^2 - tx + 4$	5	22
3	$f_t(x) = tx^2 - 3t + 2$	6	26
4	$f_t(x) = x^2 - 2tx - t^2$	7	29
5	$f_t(x) = -tx^2 + 2x - 4t$	8	34
6	$f_t(x) = x^2 + \frac{2}{t}x - 1$	9	[illegible]
7	$f_t(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}tx + \frac{1}{4}t^2 - 1$	10	[illegible]
8	$f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - 2x + 2 - t^2$	11	45
9	$f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - 2x$ [illegible]	[illegible]	53
	Zusatz: A[illegible]braische [illegible]e $y^2 +$ [illegible] $= 0$		*58*
10	$f_t(x)$ [illegible] $\frac{\ }{t}x^2 - 4x + 2$	13	65
11	f_t [illegible] $= \frac{1}{2}x^2$ [illegible] $x + 2$	14	67
12	$f_t(x) = -\frac{\ }{4}$ [illegible] $+ tx - 3t$	15	69
13	$f_t($[illegible] $x^2 - tx$ [illegible] $- 2$	16	72

Trainingsaufgabe 1

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch

$$f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - 4x + 3t \quad \text{für} \quad t \in R \setminus \{0\}$$

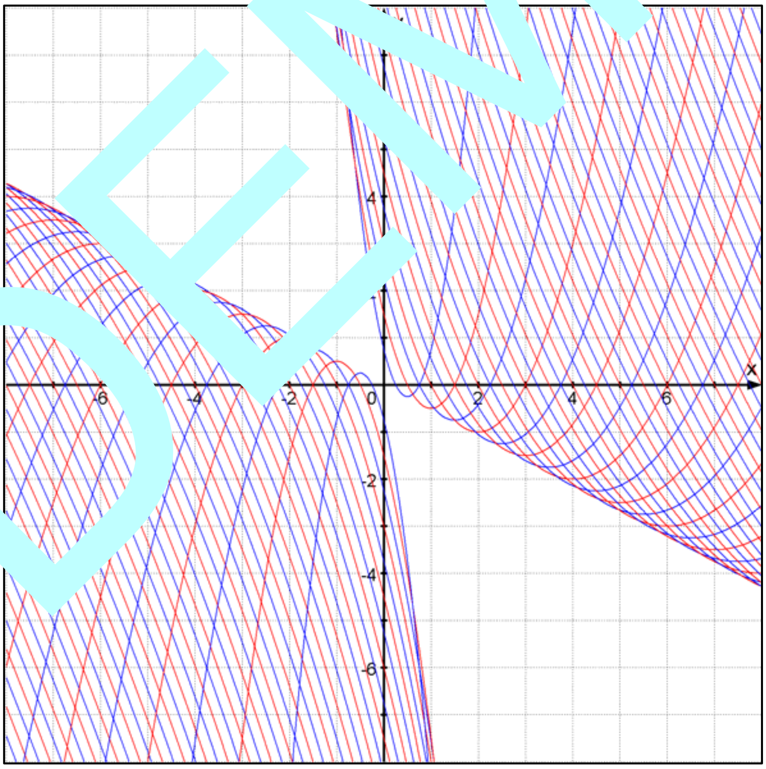
Die Schaubilder der Funktionen f_t heißen G_t.

a) Berechne die Scheitel S_t der zugehörigen Parabeln G_t.
Welche Gleichung hat die Ortskurve C, auf der die Scheitel aller Scharparabeln liegen?

b) Berechne die Nullstellen in Abhängigkeit von t.

c) Welche Parabel verläuft durch den Punkt $P(5\,|\,0)$?

d) Zeichne die Graphen G_1, G_2 und $G_{-0,5}$ in ein gemeinsames Achsenkreuz mit Längeneinheit 1 cm und $-4 \le x \le 8$, $-8 \le y \le 6$.



Trainingsaufgabe 2

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch

$$f_t(x) = \tfrac{1}{4}x^2 - tx + 4 \quad \text{für} \quad t \in R$$

Die Schaubilder der Funktionen f_t heißen G_t.

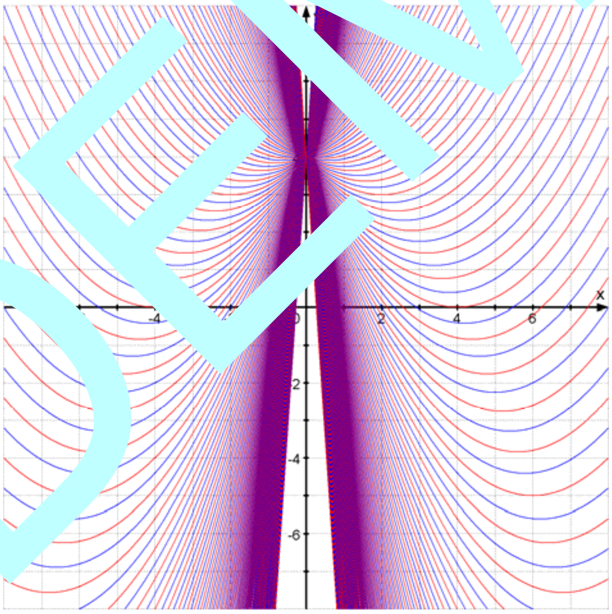
a) Berechne die Scheitel S_t der zugehörigen Parabeln G_t.
Welche Gleichung hat die Ortskurve C, auf der die Scheitel aller Scharparabeln liegen?

b) Berechne die Nullstellen in Abhängigkeit von t.

c) Welche Parabel verläuft durch den Punkt $P(6\,|\,7)$?

d) Zeige, dass es genau einen Punkt gibt, durch den alle Kur dieser Schar verla n.

e) Zeichne die Graphen G_1, G_2 und G_3 mit Länge eit 1 cm ein gemeinsam
Koordinatensystem mit $-3 \le x \le 11$ und $-6 \le y \le$.



Trainingsaufgabe 3

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch

$$f_t(x) = tx^2 - 3t + 2 \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Die Schaubilder der Funktionen f_t heißen K_t.

a) Berechne die Scheitel S_t der zugehörigen Parabeln K_t.
Welche Gleichung hat die Ortskurve C, auf der die Scheitel aller Scharparabeln liegen?

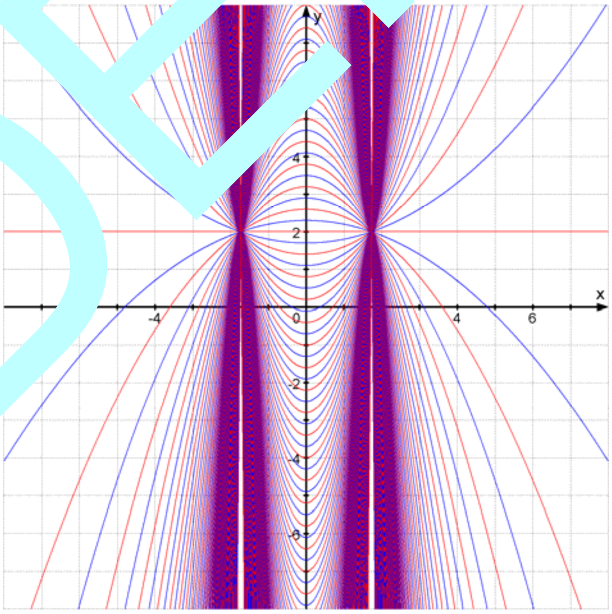
b) Berechne die Nullstellen in Abhängigkeit von t.

c) Welche Parabel verläuft durch den Punkt $P(6\,|\,7)$?

d) Berechne die gemeinsamen Punkte aller Scharkurven.

e) Zeichne die Graphen K_1, $K_{0,5}$, $K_{-0,5}$ und K_2 mit Längeneinheit 1 cm in ein gemeinsames Koordinatensystem mit $-4 \le x \le 4$ und $-5 \le y \le 5$

f) Bestimme die Anzahl der Scharkurven, welche durch einen gegebenen Punkt $P(x\,|\,y)$ der Zeichenebene verläuft.



Trainingsaufgabe 4

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch

$$f_t(x) = x^2 - 2tx - t^2 \quad \text{für} \quad t \in R$$

Die Schaubilder der Funktionen f_t heißen K_t.

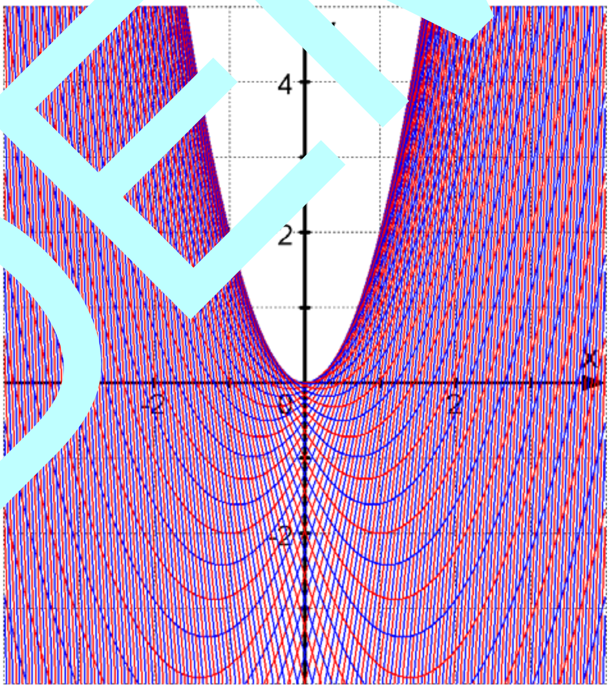
a) Berechne die Scheitel S_t der zugehörigen Parabeln K_t.
Welche Gleichung hat die Ortskurve C, auf der die Scheitel aller Scharparabeln liegen?

b) Berechne die Nullstellen in Abhängigkeit von t.

c) Verläuft durch jeden Punkt der x-y-Zeichenebene eine der Scharkurven? (Sehr schwer!)

d) Berechne die gemeinsamen Punkte aller Scharkurven.

e) Zeichne die Graphen K_1, K_{-1} und K_2 mit Längeneinheit 1 cm in ein gemeinsames Koordinatensystem mit $-4 \le x \le 6$ und $-9 \le y \le 5$
Trage auch die Ortskurve C der Scheitel ein.



Trainingsaufgabe 5

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch

$$f_t(x) = -tx^2 + 2x - 4t \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Die Schaubilder der Funktionen f_t heißen K_t.

a) Berechne die Scheitel S_t der zugehörigen Parabeln K_t.
Welche Gleichung hat die Ortskurve C, auf der die Scheitel aller Scharparabeln liegen?

b) Berechne die Nullstellen in Abhängigkeit von t.

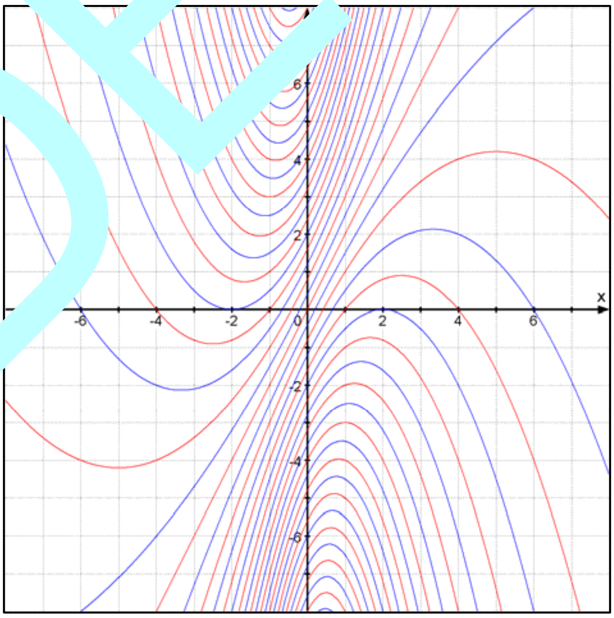
c) Verläuft durch jeden Punkt der x-y-Zeichenebene eine der Scharkurven?
Berechne t so dass K_t durch $P(1 \mid -8)$ geht.

d) Berechne die gemeinsamen Punkte aller Scharkurven.

e) Zeichne die Graphen K_1, K_{-1}, $K_{0,5}$, $K_{-0,5}$, $K_{0,25}$ und $K_{-0,25}$ mit Längeneinheit 1 cm in ein gemeinsames Koordinatensystem mit $-7 \le x \le 7$ und $-7 \le y \le 7$.

Trage auch die Ortskurve C der Scheitel ein.

Wie kann man die Kurve K_t geometrisch auf die Kurve K_{-t} abbilden?



Trainingsaufgabe 6

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch

$$f_t(x) = x^2 + \frac{2}{t}x - 1 \quad \text{für} \quad t \in R \setminus \{0\}$$

Die Schaubilder der Funktionen f_t heißen K_t.

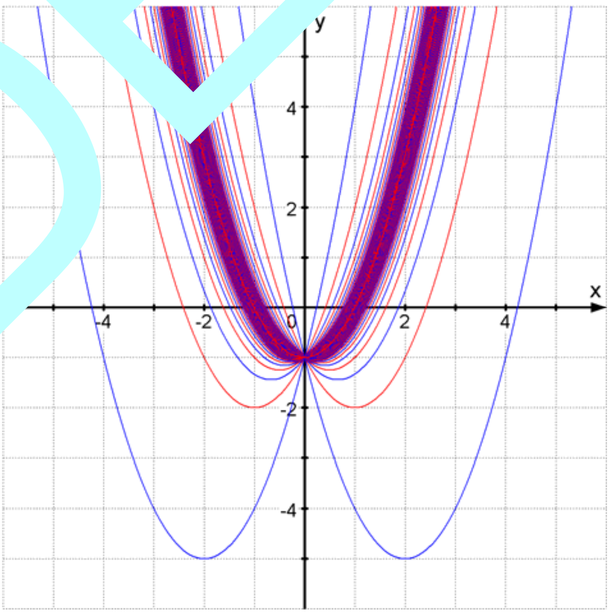
a) Berechne die Scheitel S_t der zugehörigen Parabeln K_t.
Welche Gleichung hat die Ortskurve C, auf der die Scheitel aller Scharparabeln liegen?

b) Berechne die Nullstellen in Abhängigkeit von t.

c) Welche der Scharkurven $y = x^2 + \frac{2}{t}x - 1$ gehen durch A([illegible]), $B(0 \mid -1)$ oder [illegible]$(3 \mid 8)$?
Bestimme die Anzahl der Scharkurven durch einen [illegible]eliebige[illegible] [illegible]unkt $P(x \mid y)$.

d) Berechne die gemeinsamen Punkte aller Scharkurv[illegible].

e) Zeichne die Graphen K_1 und K_2, mi[illegible]eneinheit 1 [illegible] in ei[illegible] [illegible]emeinsames Koordinatensystem mit $-6 \le x \le 6$ u[illegible] [illegible] 5.
Trage auch die Ortskurve C [illegible] Scheitel e[illegible]
Wie kann man die Ku[illegible] K_t geome[illegible]ch auf die[illegible]rve K_{-t} abbilden?



Trainingsaufgabe 7

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch

$$f_t(x) = \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}tx + \tfrac{1}{4}t^2 - 1 \quad \text{für} \quad t \in R$$

Die Schaubilder der Funktionen f_t heißen K_t.

a) Berechne die Scheitel S_t der zugehörigen Parabeln K_t.
Welche Gleichung hat die Ortskurve C, auf der die Scheitel aller Scharparabeln liegen?

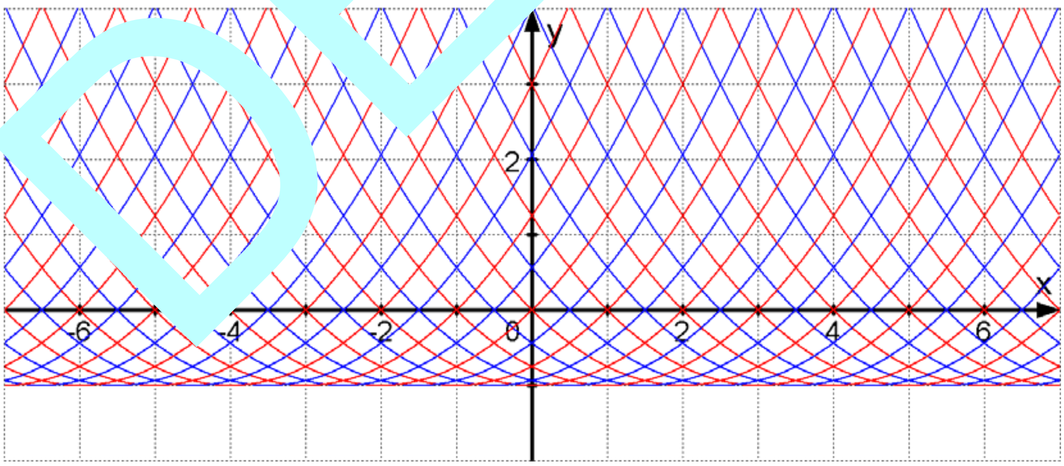
b) Berechne die Nullstellen in Abhängigkeit von t.

c) Welche der Scharkurven $y = x^2 + \frac{2}{t}x - 1$ gehen durch $A(2$ $)$, $B(0\,|\,-1)$ ode $C(3\,|\,8)$?
Bestimme die Anzahl der Scharkurven durch einen beliebig Punkt $P(x\,|\,y)$.

d) Berechne die gemeinsamen Punkte aller Scharkur n.

e) Zeichne die Graphen K_1, K_{-1} , K_2, K_{-} $K_{0,5}$ und $K_{-0,5}$ it Län einheit 1 cm in ein gemeinsames Koordinatensystem ≤ 6 und $5 \le y \le$
Trage auch die Ortskurve C d Scheite.

Wie kann man die Kurv t geometrisch auf urve K_{-t} abbilden?



Trainingsaufgabe 8

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch $f_t(x)=\frac{1}{t}x^2-2x+2-t^2$ für $t\in R\setminus\{0\}$

Die Schaubilder der Funktionen f_t heißen K_t.

a) Berechne die Scheitel S_t der zugehörigen Parabeln K_t.
Welche Gleichung hat die Ortskurve C, auf der die Scheitel aller Scharparabeln liegen?

b) Berechne die Nullstellen in Abhängigkeit von t.

c) Zeichne die Graphen K_1, K_{-1}, K_2, K_{-2} mit Längeneinheit 1 cm in ein gemeinsames Koordinatensystem mit $-6\le x\le 6$ und $-5\le y\le 5$.

d) Welche der Scharkurven $y=f_t(x)=\frac{1}{t}x^2-2x+2-t^2$ gehen durc… bzw. $B(-3|-2)$

e) Berechne die gemeinsamen Punkte aller Scharkurven. Zeig… dass für einen e…tuellen gemeinsamen Punkt gilt $x_{1,2}=\pm\sqrt{-(t_1+t_2)\cdot t_1\cdot t_2}$.

Wie viele gemeinsame Punkte gibt es wenn

(1) t_1 und t_2 beide positiv sind, (2) … beide …ativ sind.

(3) t_1 und t_2 verschiedene Vorzeichen aufweisen.

Gib hier zu jedem denkbaren Fall ein Beispiel an.

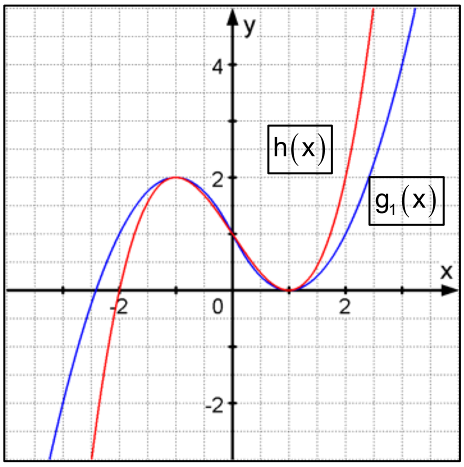
f) Gegeben ist für $t>0$ eine neue Funk…ensc… g_t dur… folgende Definition:

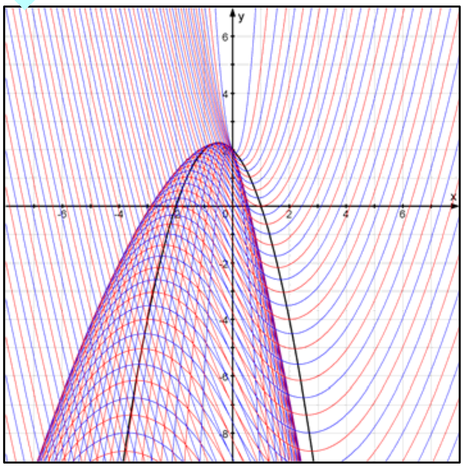
$$g_t(x)=\begin{cases} f_t(x) & \text{für } x\ge 0 \\ f_{-t}(x) & \text{für } x<0\end{cases}$$

(1) Zeige, dass i… dieser Funk…en bei x = 0 …etig und differenzierbar ist

(2) Zeige: Das Sc…bild G… von g_t ist punktsymmetrisch zum Punkt $S_y(0|2-t^2)$.

g) Die Kurve G… gleicht eine… …rabel 3. Gra…
Stelle d… …n Gleich… so auf, … s si… den Extrem- und …endepunkten mi… überei…mmt.
An … …cher Stelle ist im B…eich $0<x<1$ die Ab…chung $d(x)=h(x)-g_1(x)$ ein Maximum?
Um wie viel Pr… …eicht h(x) an dieser Stelle von g(x) ab?





Trainingsaufgabe 9

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch

$$f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - 2x + t + \frac{1}{t} \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Die Schaubilder der Funktionen f_t heißen K_t.

a) Berechne die Scheitel S_t der zugehörigen Parabeln K_t.
Welche Gleichung hat die Ortskurve C, auf der die Scheitel aller Scharparabeln liegen?

b) Berechne die Nullstellen in Abhängigkeit von t.

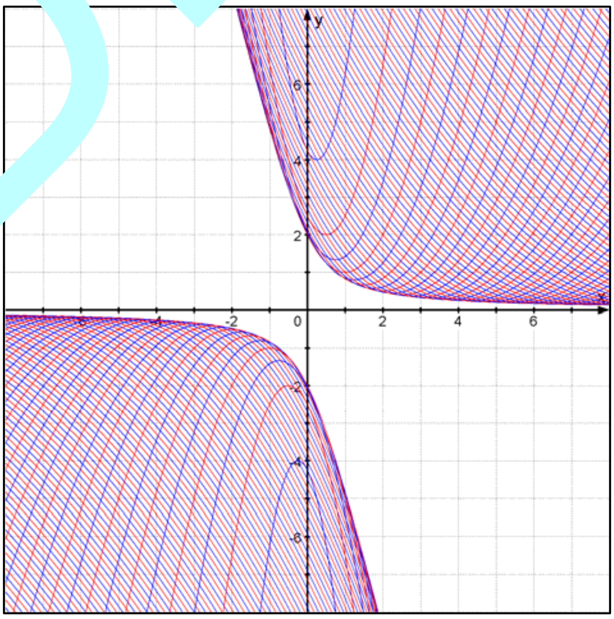
c) Welche der Scharkurven gehen durch $A(3\,|\,\frac{1}{2})$, $B(0\,|\,-2)$ [illegible] der $C(-2\,|\,5)$?

Zeige: Durch alle Punkte oberhalb der Kurve G_1: [illegible] $= -2x +$ [illegible] $\sqrt{x^2+1}$ und unte[illegible]alb von G_2: $y = -2x - 2\cdot\sqrt{x^2+1}$ gehen genau zwei S[illegible]a[illegible]ven . [illegible] die P[illegible]e dieser beiden „Grenzkurven“ geht genau eine der Scharkurven. De[illegible]ere[illegible]zwischen diesen Kurven wird von keiner Scharkurve getroffen.

d) Zeichne die Graphen $K_{0,5}$, K[illegible]nd K_2 [illegible]Länge[illegible]he[illegible] cm in ein gemeinsames Koordinatensystem mit $-$[illegible]$x \le 6$ und $-$[illegible]≤ 8. Tra[illegible]auch die Ortskurve der Scheitel ein.

e) Zeige, dass es kei[illegible]Punkt gibt [illegible]ch den alle Ku[illegible]en dieser Schar gehen.

Es sei $P(x\,|\,y)$ ein Punk[illegible]-Achse, dur[illegible]en zwei Scharkurven verlaufen.
Welcher [illegible]ang gilt [illegible] die Pa[illegible]eterwerte t_1 und t_2 dieser beiden Scharkurven?



Trainingsaufgabe 10

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch

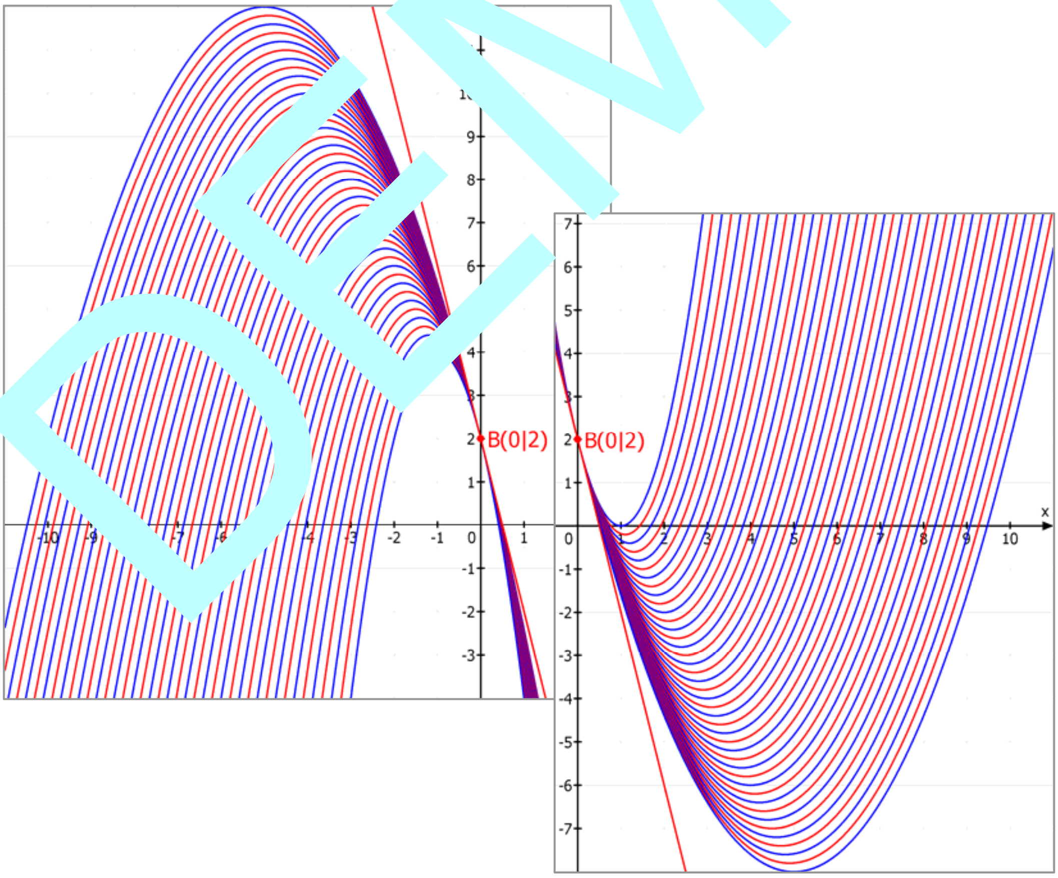
$$f_t(x) = \frac{2}{t}x^2 - 4x + 2 \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

K_t sei das Schaubild von f_t.

a) Ermittle die Nullstellen. Stelle eine Vorzeichenuntersuchung für den Radikanden an und gib an, wie viele Nullstellen f_t hat, in Abhängigkeit von t.

b) Berechne den Scheitel S_t einer beliebigen Parabel K_t.
Auf welcher Ortskurve C liegen alle Scheitel der Parabelscha

c) Zeichne die Parabeln K_1, K_2 und K_4 in ein gemeinsames Achsenkreuz.
(Berechne zuerst die Scheitel und plane dann die Größe des Achsenkreuzes)
Trage auch die Ortskurve C ein.



Trainingsaufgabe 11

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch

$$f_t(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - 2tx + 2 \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}.$$

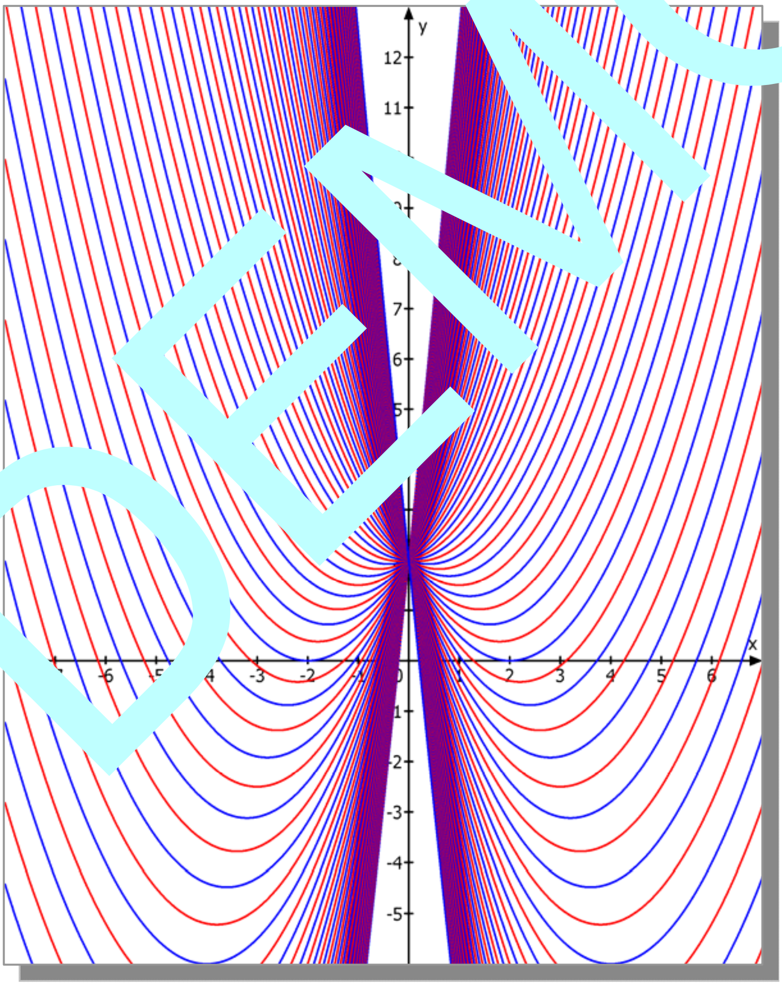
K_t sei das Schaubild von f_t.

a) Ermittle die Nullstellen.
Stelle eine Vorzeichenuntersuchung für den Radikanden an und gib an, wie viele Nullstellen f_t hat, in Abhängigkeit von t.

b) Berechne den Scheitel S_t einer beliebigen Parabel K_t.

Auf welcher Ortskurve C liegen alle Scheitel der Parabelschar?

c) Zeichne die Parabeln K_t für t = 0, t = 1 , t = 2 und t = 0,5 in ein gemeinsames Achsenkreuz.
(Berechne zuerst die Scheitel und plane dann die Größe des Achsenkreuzes)



Trainingsaufgabe 12

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch die Gleichung

$$f_t(x) = \frac{1}{4}x^2 + tx - 3t \quad \text{mit} \quad t \in R$$

Das Schaubild der Funktion f_t heiße K_t.

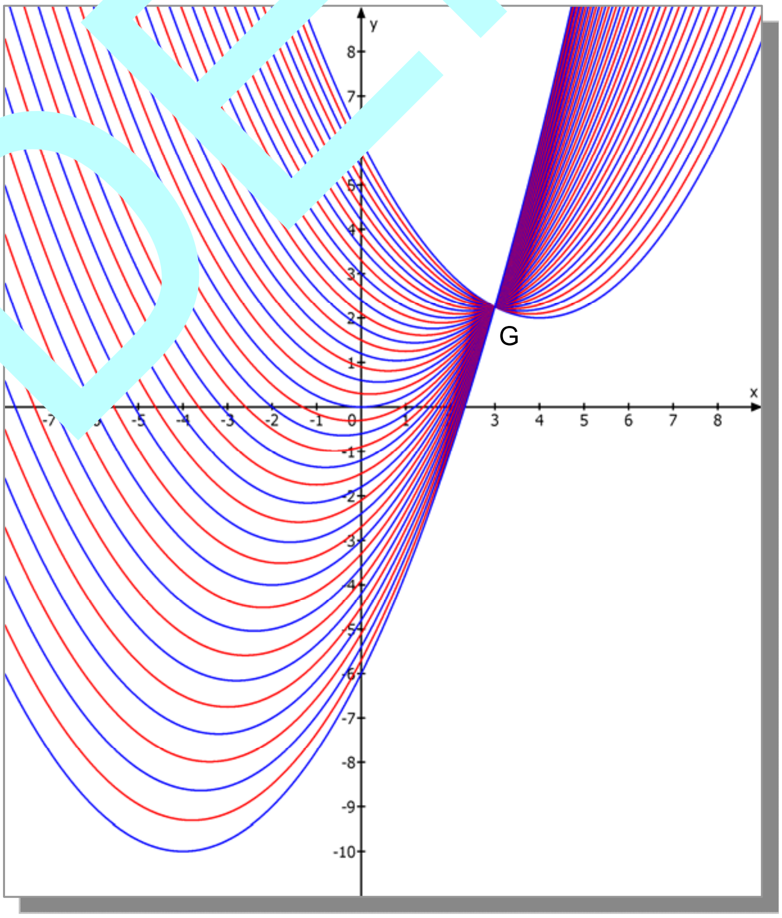
a) Berechne den Scheitel S_t einer beliebigen Scharkurve.
Ermittle die Gleichung der Ortskurve C dieser Scheitel.
Berechne auch den Scheitel S* von C.
Bestimme die Nullstellen von f_t und ihre Anzahl in Abhängigkeit von t.

b) Trage das Schaubild von f_1 sowie die Ortskurve in ein Achsenkreuz ein.

c) Die Gerade g: $y = \frac{1}{2}x - 1$ schneidet die Parabel K_1 in A und C.
Stelle die Gleichung der Tangente in A ($x_A > 0$) auf.
Es gibt eine zu g parallele Tangente an K_1. Berechne die Koordinaten des zugehörigen Berührpunktes B.

d) Prüfe nach, ob es einen Punkt G gibt, durch den alle Parabeln der Schar K_t gehen und berechne ggf. seine Koordinaten.

e) Durch welche Punkte Q(x …) gehen Ku… der Sch…



Trainingsaufgabe 13

Gegeben ist die Funktionenschar durch

$$f_t(x) = x^2 - tx + t - 2 \quad \text{mit} \quad t \in R\ .$$

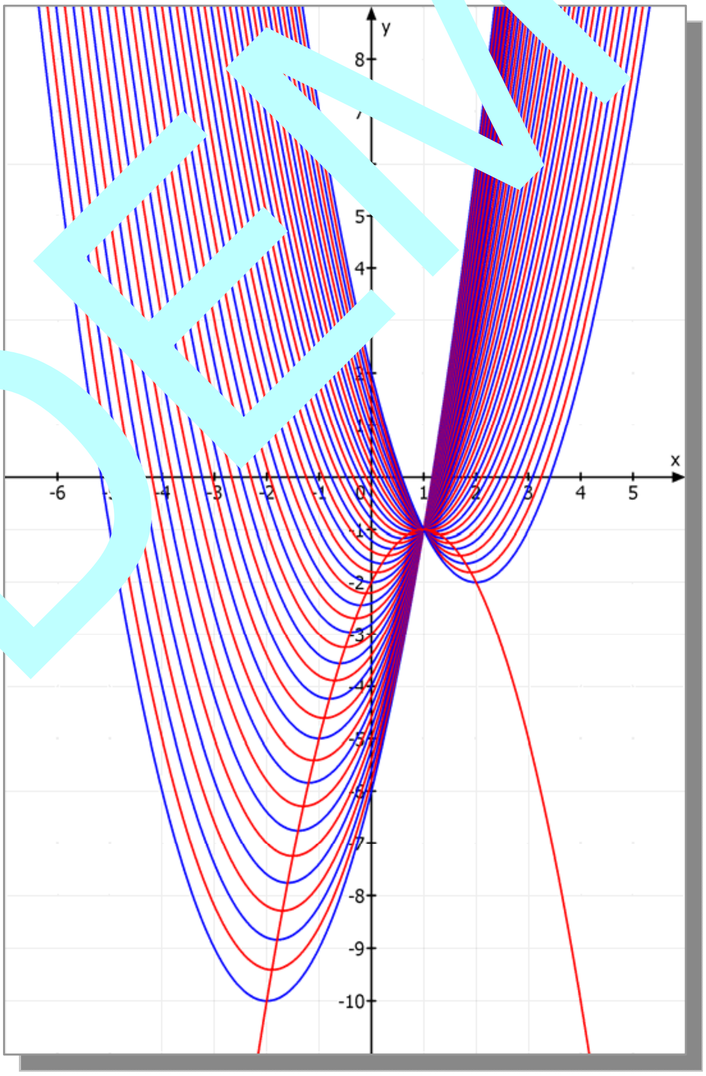
Das Schaubild der Funktion f_t heiße K_t.

a) Berechne den Scheitel einer beliebigen Scharkurve K_t.
Welche Gleichung hat die Ortskurve C aller Parabelscheitel?

b) Zeichne die Kurven K_4 , K_{-2} und die Ortskurve C in ein Achsenkreuz:
(x-Achse - 5 bis 5, y-Achse - 6 bis 6, Längeneinheit 1 cm)

c) Berechne die Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von t.

d) Durch welche Punkte gehen alle Kurven der Schar?
Welche Scharkurve geht durch $A(3\,|\,-5)$?
Wie viele Kurven dieser Schar gehen durch einen gegebenen Punkt $Q(x\,|\,y)$?



LÖSUNGEN

Lösung Trainingsaufgabe 1

Gegeben ist $f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - 4x + 3t$ für $t \in R \setminus \{0\}$

a) **Berechnung der Scheitelform durch quadratische Ergänzung:**

Zunächst die Beschreibung, wie man diese Form herstellt.

1. Schritt: Schreibe y = und klammere den Koeffizienten $\frac{1}{t}$ aus den Summanden aus, die x enthalten:

$$y = \tfrac{1}{t}\cdot\left(x^2 - 4t\cdot x + \boxed{}\right) + 3t \qquad (1)$$

Ausklammern von $\frac{1}{t}$ heißt: In der Klammer d... n $\frac{1}{t}$ dividieren, ... mit t multiplizieren. So wird aus -4x dann $\frac{-4...}{\frac{1}{t}} = -4tx$.

Weil das Ziel ein binomischer Ausdr... bei d... noch das Qu... t zu ergänzen ist, das noch fehlt, wurde da... e... erer Ka... t.

2.- Schritt: Ermittlung des binomis... Ausdrucks:

Überlegungen: ...us $(x ... x + \square)$ ...ll ... $x - b)^2$ werden.

Wegen $(x - ...) = x^2 - \boxed{2xb} + ...$ ...tellt -4tx ...s doppelte Produkt dieses binomis... Ausdruck... ...r. Um b ... ...kommen, muss man folglich -4t halbiere... ...d erhä... 2t.

A... wird $(x ... x + \square) = (x ...)^2$.

Das zu ...nzend... ...t ist daher $\boxed{4t^2}$

Aus (1) folgt ... er

$$... = \tfrac{1}{t}\cdot\left(x^2 - 4t\cdot x + \boxed{4t^2}\right) + 3t - ??? \qquad (2)$$

3. Schritt: Du... ...e Ergänzung von $4t^2$ hat sich die rechte Seite der Gleichung geändert. Dies ist nicht zulässig, also muss man diese Ergänzung außerhalb der Klammer wieder ausgleichen. Dazu folgende Überlegung:
In der Klammer wurde $4t^2$ ergänzt. Weil die Klammer aber noch den Faktor $\frac{1}{t}$ trägt, wurde rechts in Wirklichkeit $\frac{1}{t}\cdot 4t^2$ also 4t ergänzt. Dies muss man durch Subtraktion wieder ausgleichen: Also muss (2) so ergänzt werden:

$$y = \tfrac{1}{t}\cdot\left(x^2 - 4t\cdot x + \boxed{4t^2}\right) + 3t - \boxed{4t} \qquad (3)$$

4. Schritt: Jetzt fasst man noch zusammen und hat die Scheitelform hergestellt.

$$\boxed{y = \tfrac{1}{t}\cdot(x - 2t)^2 - t} \qquad (4)$$

Jetzt die Kurzlösung, wie sie im Heft stehen sollte:

$$f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - 4x + 3t$$

$$y = \tfrac{1}{t}\cdot\left(x^2 - 4t\cdot x + \boxed{4t^2}\right) + \underbrace{3t - \boxed{4t}}_{-t}$$

halbieren quadrieren

$$\boxed{y = \tfrac{1}{t}\cdot(x-2t)^2 - t}$$

Die Scheitel der Parabeln G_t haben also diese Koordinaten: [illegible]$_t(2t \mid -t)$

Hinweis:

Wer schon mit Ableitungen rechnen kann, findet die Pa[illegible]elscheitel mit die[illegible]

Kurzmethode: $f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - 4x + 3t$

$f_t'(x) = \frac{2}{t}x - 4$

Bedingung für waagrechte Tangente[illegible] $f_t'(x) = 0$ [illegible].

$\frac{2}{t}x - 4 = 0 \Leftrightarrow$ [illegible] t [illegible] 4 [illegible] $= 2$[illegible]

$y_S = f$ [illegible] $= \frac{1}{t}\cdot(2t)^2 - 4\cdot$ [illegible] $+ 3t = 4t$ [illegible] $+ 3t = -t$

Ergebnis: [illegible] $\mid -t)$

Gleichung der Ortskurve alle[illegible]tel.

Es gilt [illegible] $= 2t$ [illegible] $= \tfrac{1}{2}x_S$ [illegible]ins[illegible]n in

$y_S = -t$ $\qquad y_S = -\tfrac{1}{2}x_S$

Erge[illegible] Die Gleichu[illegible] der Ortskurve ist $\boxed{y = -\tfrac{1}{2}x}$

Achtung Zusatz:

In der Aufgabe wa[illegible] gegeben $f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - 4x + 3t$ für $t \in R \setminus \{0\}$. Der Grund dafür, dass t = 0 nicht verwendbar ist, liegt darin, dass der Koeffizient von x^2 $\frac{1}{t}$ lautet!

Soll man angeben, welcher Teil der Ortskurve von Scheiteln belegt ist, dann hilft diese Erkenntnis weiter: Weilt t = 0 ausgeschlossen ist, kann x_S = 2t auch nie 0 werden.

Die Ortskurve ist also die Ursprungsgerade $y = -\tfrac{1}{2}x$ außer x = 0.

Die Ortskurve ist also eine punktierte Gerade.

b) **Nullstellen in Abhängigkeit von t**

$f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - 4x + 3t$ Pflichttext:

Bedingung für Nullstellen: $\boxed{f_t(x) = 0}$ (oder y = 0)

d. h. $\frac{1}{t}x^2 - 4x + 3t = 0 \quad | \cdot t$ (vereinfachen)

$x^2 - 4tx + 3t^2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4t \pm \sqrt{16t^2 - 12t^2}}{2} = \frac{4t \pm \sqrt{4t^2}}{2} = \frac{4t \pm 2t}{2} = \begin{cases} 3t \\ t \end{cases}$

Ergebnis: $N_1(3t\,|\,0)$ und $N_2(t\,|\,0)$

Zusatz: Da $t \neq 0$ ist, sind diese Nullstellen vers eden.
Jede Parabel der Schau hat somit genau 2 N llstellen.

c) **Welche Parabel verläuft durch den Punkt** $P(5\,|\,0)$?

WISSEN: Wenn ein Punkt a ve liegt, ann en en seine Koordinaten die Kurve ichung. tzt ma ein, entsteht eine wahre Aussage.

$y = \frac{1}{t}x^2 - 4x + 3t$ $\boxed{y = 0}$ $\boxed{x = 5}$

Einse von P in rveng ergibt:

$0 = \frac{1}{t} \cdot 25 - 20 + 3t \quad | \cdot t$

$0 = 25 - 20 \cdot t + 3t^2$ umordnen:

$3t^2 - 20t + 25 = 0$

$t_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 3 \cdot 25}}{6} = \frac{20 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} = \begin{cases} 5 \\ \frac{5}{6} \end{cases}$

Ergebnis: Die Parabeln, die zu t = 5 oder zu $t = \frac{5}{6}$ gehören, verlaufen durch $P(5\,|\,0)$.

d) **Zeichnung der Graphen:** **(Die folgenden 3 Zeilen sind notwendig!)**

G_1: (also für t = 1) $y = x^2 - 4x + 3$ mit $S_1(2\,|-1)$ sowie $N_1(3\,|\,0)$ und $N_2(1\,|\,0)$

G_2: (also für t =2) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ mit $S_2(4\,|-2)$ sowie $N_1(6\,|\,0)$ und $N_2(2\,|\,0)$

$G_{-0,5}$: (also für $t = -\frac{1}{2}$) $y = -2x^2 - 4x - \frac{3}{2}$ mit $S_{-\frac{1}{2}}(-1\,|\,\frac{1}{2})$ sowie $N_1(-\frac{3}{2}\,|\,0)$ und $N_2(-\frac{1}{2}\,|\,0)$